

Zur Theorie der Polarisation des Sternlichts an interstellarem Staub

Von OTTO ZIMMERMANN *

Aus dem Astronomischen Institut der Universität Tübingen
(Z. Naturforsch. 12 a, 647—657 [1957]; eingegangen am 6. März 1957)

Die Absorption und Polarisation des Sternlichts beim Durchgang durch eine Wolke von teilweise ausgerichteten rotationsellipsoidischen Eisenstaubteilchen wird in 2. Näherung berechnet unter der Annahme eines einfachen, aus der Sternschnuppenstatistik entnommenen Verteilungsgesetzes für die Teilchengröße und eines LANGEVINschen bzw. GAUSSschen Verteilungsgesetzes für die Richtungen der Längsachsen. Aus den numerischen Ergebnissen kann man schließen, daß die vorliegende Näherung bis zu Teilchen von 10^{-5} cm Radius brauchbar sein wird. Eine Erweiterung der Theorie auf größere Teilchen wird auf anderem Wege versucht.

Durch Vergleich der Theorie mit Beobachtungen an einigen Exemplaren der Sternhaufen η und χ Persei werden die Parameter der Verteilungsgesetze, die Exzentrizität der Partikel und die Dichte der Staubwolken bestimmt. Abschließend werden noch einige Mechanismen diskutiert, die für die Ausrichtung der Teilchen verantwortlich gemacht werden können.

I. Die Polarisation des Lichts beim Durchgang durch Wolken von rotationsellipsoidischen Eisenstaubteilchen, auf die ausrichtende Kräfte wirken

1. Beugung des Lichts an verlängerten Rotationsellipsoiden

Wir benutzen im folgenden die Theorie der Beugung am Ellipsoid von STEVENSON¹, der die Feldgrößen des Beugungsfeldes in Potenzreihen nach dem Verhältnis der Lineardimensionen des beugenden Körpers zur Wellenlänge des Lichts entwickelt. Die Methode wird auf die Beugung elektromagnetischer Wellen am Ellipsoid in dritter Näherung angewandt². Wir spezialisieren die Ergebnisse dieser Arbeit auf verlängerte Rotationsellipsoide.

In das beugende Rotationsellipsoid legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) derart, daß die Gleichung des Ellipsoids die Gestalt erhält:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Dabei sei a die kleine, c die große Halbachse des Rotationsellipsoids, dessen numerische Exzentrizität also gegeben ist durch

$$\eta = \sqrt{1 - a^2/c^2}. \quad (2)$$

Das Ellipsoid habe die Dielektrizitätskonstante ϵ und die Permeabilität μ und befinde sich im Vakuum.

Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden ebenen Welle sei gegenüber dem körperfesten Koordinatensystem gegeben durch die Richtungskosinus l, m, n . Diese Richtung ist gleichzeitig die $+X$ -Richtung eines raumfesten Koordinatensystems, dessen Ursprung im Mittelpunkt des Ellipsoids liegt und dessen Z -Achse mit der Vorzugsrichtung der großen Achse zusammenfällt. Die y -Achse des körperfesten Systems liege in der (X, Y) -Ebene des raumfesten Systems und bilde mit der $-Y$ -Achse den Winkel ψ ,

während der Winkel zwischen der z - und der Z -Achse mit χ bezeichnet werde. Wir nehmen an, daß der elektrische Vektor der einfallenden Welle im körperfesten System die Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 habe und mit der Z -Achse den Winkel δ bilde. Der magnetische Vektor habe entsprechend im raumfesten System die Richtungskosinus l_2, m_2, n_2 . Schließlich bezeichnen wir die sphärischen Koordinaten des in der Wellenzone liegenden Aufpunkts im raumfesten (X, Y, Z) -System mit (r, ϑ, φ) , seine Richtungskosinus im körperfesten (x, y, z) -System mit α, β, γ . Die Feldvektoren der einfallenden Welle haben also die Gestalt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^e &= (l_1, m_1, n_1) \cdot e^{i\kappa(lx + my + nz)} \\ \mathcal{H}^e &= (l_2, m_2, n_2) \cdot e^{i\kappa(lx + my + nz)} \quad \left(\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

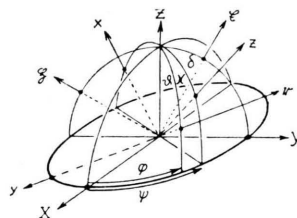


Abb. 1.

während der Winkel zwischen der z - und der Z -Achse mit χ bezeichnet werde. Wir nehmen an, daß der elektrische Vektor der einfallenden Welle im körperfesten System die Richtungskosinus l_1, m_1, n_1 habe und mit der Z -Achse den Winkel δ bilde. Der magnetische Vektor habe entsprechend im raumfesten System die Richtungskosinus l_2, m_2, n_2 . Schließlich bezeichnen wir die sphärischen Koordinaten des in der Wellenzone liegenden Aufpunkts im raumfesten (X, Y, Z) -System mit (r, ϑ, φ) , seine Richtungskosinus im körperfesten (x, y, z) -System mit α, β, γ . Die Feldvektoren der einfallenden Welle haben also die Gestalt:

* Kirchheim (Te^k).

¹ A. F. STEVENSON, J. Appl. Phys. 24, 1134 [1953].

² A. F. STEVENSON, J. Appl. Phys. 24, 1143 [1953].



Für die Beugungswelle erhält STEVENSON² in der Wellenzone:

$$\begin{aligned} E^b &= H^b = \left(\frac{\partial P}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \varphi} \right) \frac{e^{i\kappa r}}{r}, \\ E^b &= -H^b = \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \vartheta} \right) \frac{e^{i\kappa r}}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dabei ist, wenn man Glieder höherer Ordnung in κ vernachlässigt:

$$\begin{aligned} P &= \kappa^2 (K_1 \alpha + K_2 \beta + K_3 \gamma) \\ &+ \kappa^4 \{ L_1 \alpha + L_2 \beta + L_3 \gamma + M_1 \alpha^2 + M_2 \beta^2 \\ &+ M_3 \gamma^2 + N_1 \beta \gamma + N_2 \gamma \alpha + N_3 \alpha \beta \\ &- \frac{1}{30} (K_1 \alpha + K_2 \beta + K_3 \gamma) \\ &\cdot [1 - \eta^2 (1 - \gamma^2)] \}. \end{aligned} \quad (5)$$

Hier ist von folgenden Abkürzungen Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned} K_1 &= K_a l_1, \quad K_2 = K_a m_1, \quad K_3 = K_c n_1; \\ L_1 &= L_{a1} l_1 + L_{a2} n^2 l_1 + L_{a3} m n_2 - L_{a4} n m_2, \\ L_2 &= L_{a1} m_1 + L_{a2} n^2 m_1 - L_{a3} l n_2 + L_{a4} n l_2, \\ L_3 &= L_{c1} n_1 + L_{c2} n^2 n_1 + L_{c3} l m_2 + L_{c4} m l_2; \\ M_1 &= M_{ac} (2 l l_1 - m m_1) - M_{aa} n n_1, \\ M_2 &= M_{ac} (-l l_1 + 2 m m_1) - M_{aa} n n_1, \\ M_3 &= M_{ac} (-l l_1 - m m_1) + 2 M_{aa} n n_1; \\ N_1 &= -N_{a1} l_2 + N_{a2} m n_1 + N_{a3} n m_1, \\ N_2 &= +N_{a1} m_2 + N_{a2} l n_1 + N_{a3} n l_1, \\ N_3 &= N_c (l m_1 + m l_1). \end{aligned} \quad (5a)$$

Dabei sind die Größen K_a, \dots, N_c Funktionen der geometrischen Daten c, η und der Materialkonstanten ε, μ des beugenden Ellipsoids.

Analog zu (5) gilt:

$$\bar{P} = \kappa^2 (\bar{K}_1 \alpha + \dots) + \kappa^4 [\bar{L}_1 \alpha + \dots]. \quad (6)$$

Die Funktionen \bar{K}_1, \dots erhält man aus K_1, \dots durch folgende Substitutionen (7):

$$\begin{aligned} (l_1, m_1, n_1) &\rightarrow (l_2, m_2, n_2), \\ (l_2, m_2, n_2) &\rightarrow -(l_1, m_1, n_1), \\ \varepsilon &\longleftrightarrow \mu. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Die Verteilung der Teilchenachsen bezüglich der durch die ausrichtende Kraft gegebenen Vorzugsrichtung

Wir nehmen nun an, die beugenden Rotationsellipsoide der interstellaren Staubwolken befänden sich in irgend einem Kraftfeld, das die großen Achsen der Teilchen parallel zu stellen versucht und damit der durch die Temperatur T bestimmten thermischen Unordnung entgegenwirkt. Ohne genaue Kenntnis dieser Kräfte folgt dann schon aus der BOLTZMANNschen Statistik, daß der Bruchteil der Teilchen, die im Kraftfeld eine potentielle Energie u haben, gegeben ist durch:

$$\frac{dN}{N} = \frac{\exp(-u/kT) \cdot \sin \chi \, d\chi \, d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \exp(-u/kT) \cdot \sin \chi \, d\chi \, d\psi}. \quad (8)$$

Dabei ist k die BOLTZMANNsche Konstante und χ der Winkel, den die große Teilchenachse mit der Vorzugsrichtung bildet. Nimmt man an, daß die potentielle Energie für $\chi = 0$ ein Minimum haben soll, so muß sich u in der Form darstellen lassen:

$$-u(\chi) = a \cos \chi + a' \cos^2 \chi + \dots \quad (9)$$

Zur Vereinfachung des Problems nehmen wir zwei Grenzfälle an:

$$1) \quad a \gg a', \dots: \quad -u(\chi) = a \cos \chi, \quad (9a)$$

$$2) \quad a' \gg a, \dots: \quad -u(\chi) = a' \cos^2 \chi. \quad (9b)$$

Die Integrale, welche bei der im folgenden durchzuführenden Mittelbildung der Lichtintensität über die verschiedenen Achsenrichtungen der beugenden Teilchen auftreten, lassen sich alle zurückführen auf die beiden Grundtypen

$$I_{2n} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{\beta x} x^{2n} dx \, d\psi \quad \text{bzw.} \quad I'_{2n} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{\beta' x} x^{2n} dx \, d\psi \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Dabei wurden die Abkürzungen benützt:

$$a/kT = \beta, \quad a'/kT = \beta'. \quad (10)$$

Für die allein vorkommenden Verhältnisse

$$F_{2n} = I_{2n}/I_0, \quad F'_{2n} = I'_{2n}/I'_0 \quad (11)$$

erhält man dann durch partielle Integration die Rekursionsformeln (11a) und (11b):

$$F_{2n+2} = 1 - \frac{2n+2}{\beta} \zeta \operatorname{tg} \beta + \frac{(2n+1)(2n+2)}{\beta^2} F_{2n}, \quad F_0 = 1, \quad (11a)$$

$$F'_{2n+2} = \frac{1}{\beta'} \left(2\pi \frac{e^{\beta'}}{I_0'} - \frac{2n+1}{2} F'_{2n} \right), \quad F'_0 = 1. \quad (11b)$$

Eine numerische Berechnung der Funktionen (11) liefert Tab. 1.

β, β'	0,00	0,01	0,10	0,50	1,00	1,50	2,00	4,00	∞
$F_2(\beta)$	0,333	0,333	0,333	0,344	0,374	0,417	0,462	0,625	1,000
$F_4(\beta)$	0,200	0,200	0,200	0,202	0,236	0,273	0,310	0,469	1,000
$F'_2(\beta')$	0,333	0,334	0,342	0,379	0,428	0,480	0,532	0,73	1,000
$F'_4(\beta')$	0,200	0,201	0,208	0,243	0,285	0,333	0,383	0,58	1,000

Tab. 1.

3. Absorption des Lichts durch eine Wolke teilweise ausgerichteter Rotationsellipsoide

Um die Strahlungsintensität in einem Aufpunkt zu erhalten, der vom beugenden Ellipsoid aus in Richtung (ϑ, φ) liegt, hat man den zeitlichen Mittelwert über den Betrag des POYNTING-Vektors zu bilden, der sich aus drei Summanden zusammensetzt:

$$S = S_1 + S_2 + S_3, \quad (12)$$

S_1 ist dabei die Intensität des einfallenden Lichts, S_3 die des Streulichts.

Enthält nun die Wolke in der Volumeinheit N beugende Teilchen, so ist der Absorptionskoeffizient der Teilchenwolke pro Längeneinheit des Lichtwegs

$$k = N \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_2 r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (13)$$

Dabei ist die Intensität des einfallenden Lichts gleich 1 gesetzt.

Befinden sich in der Volumeinheit dN Teilchen, deren große Achsen gegenüber dem raumfesten Koordinatensystem Richtungen zwischen (χ, ψ) und $(\chi + d\chi, \psi + d\psi)$ haben, so hat man in (13) statt $N S_2$ den mit der Verteilungsfunktion (8) gewonnenen Mittelwert zu setzen:

$$\overline{N S_2} = N \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_2 e^{-u/kT} \sin \chi \, d\chi \, d\psi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-u/kT} \sin \chi \, d\chi \, d\psi}. \quad (14)$$

Für die Ausführung der sehr umfangreichen Integrationen (14) empfiehlt es sich, für den Winkel δ des elektrischen Vektors der einfallenden Welle die Spezialisierungen $\delta = 0$ und $\delta = \pi/2$ auszuwählen.

In der Wellenzone, d. h. für $\kappa r \gg 1$, lassen sich dann auch die Integrale (13) auswerten. So erhält man schließlich die beiden Absorptionskoeffizienten $k_{||}$ (für $\delta = 0$) und k_{\perp} (für $\delta = \pi/2$) in Form von Reihen nach Potenzen von κc , deren Koeffizienten Summen sind aus Produkten der F_{2n} bzw. F'_{2n} mit den Imaginärteilen $K_a'', \dots, \overline{N_c}''$ der Funktionen K_a, \dots, N_c .

4. Berechnung der Absorptionskoeffizienten für Eisenteilchen bei den Wellenlängen 430 $m\mu$ und 540 $m\mu$

Aus den optischen Konstanten für galvanisch zerstäubtes Eisen erhält man für die Dielektrizitätskonstante folgende Werte:

$$\varepsilon = \begin{cases} -0,26 + 3,38 i & \text{für } \lambda_1 = 430 m\mu, \\ -0,35 + 4,37 i & \text{für } \lambda_2 = 540 m\mu. \end{cases}$$

Die Permeabilitätskonstante μ kann man im Frequenzbereich des sichtbaren Lichts mit genügender Näherung gleich 1 setzen. Ordnet man nun nach den F_{2n} , so ergibt sich unter Berücksichtigung von $F_0 = 1$ für die Absorptionskoeffizienten:

$$\begin{aligned} k_{||} &= -\frac{4\pi^2 c^3 N}{\lambda} \{ K_a'' + F_2(K_c'' - K_a'') + \kappa^2 c^2 \cdot [G_0 + F_2 G_2 + F_4 G_4] \}, \\ k_{\perp} &= -\frac{4\pi^2 c^3 N}{\lambda} \{ \frac{1}{2}(K_a'' + K_c'') - \frac{1}{2} F_2(K_c'' - K_a'') + \kappa^2 c^2 [H_0 + F_2 H_2 + F_4 H_4] \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Für die von der numerischen Exzentrizität η der beugenden Ellipsoide und der Wellenlänge λ des gebeugten Lichts abhängigen Faktoren der F_{2n} gibt Tab. 2 einige Zahlenwerte.

λ	η	0,00	0,40	0,60	0,70	0,80	0,90	0,92
430 m μ	K_a''	0,702	0,563	0,399	0,302	0,201	0,094	0,072
	$K_c'' - K_a''$	0,000	0,082	0,157	0,184	0,188	0,144	0,117
	G_0	0,523	0,364	0,204	0,127	0,0617	0,0156	0,0085
	G_2	0,000	0,061	0,081	0,065	0,0157	— 0,0112	— 0,0112
	G_4	0,000	— 0,008	— 0,013	— 0,016	— 0,0162	— 0,0124	— 0,0109
	$\frac{1}{2}(K_c'' + K_a'')$	0,702	0,604	0,478	0,394	0,295	0,166	0,131
	$\frac{1}{2}(K_c'' - K_a'')$	0,000	0,041	0,079	0,092	0,094	0,072	0,059
	H_0	0,523	0,387	0,234	0,149	0,0577	0,0011	— 0,0047
	H_2	0,000	— 0,017	— 0,017	— 0,009	+ 0,0162	+ 0,0223	+ 0,0188
	H_4	0,000	0,003	0,004	0,004	0,0047	0,0042	0,0033
	K_a''	0,600	0,483	0,337	0,251	0,164	0,0763	0,0580
	$K_c'' - K_a''$	0,000	0,082	0,167	0,207	0,223	0,199	0,1770
540 m μ	G_0	0,518	0,358	0,198	0,116	0,0538	0,0124	0,0068
	G_2	0,000	0,104	0,168	0,173	0,1179	0,0413	0,0174
	G_4	0,000	— 0,008	— 0,011	— 0,013	— 0,0136	— 0,0105	— 0,0103
	$\frac{1}{2}(K_c'' + K_a'')$	0,600	0,524	0,421	0,355	0,276	0,176	0,147
	$\frac{1}{2}(K_c'' - K_a'')$	0,000	0,041	0,084	0,104	0,112	0,100	0,089
	H_0	0,518	0,404	0,272	0,189	0,1014	0,0241	0,0077
	H_2	0,000	— 0,042	— 0,062	— 0,061	— 0,0349	— 0,0024	+ 0,0068
	H_4	0,000	0,002	0,003	0,004	0,0042	0,0036	0,0034

Tab. 2.

Mit den Zahlenwerten aus Tab. 1 und 2 lassen sich nun die Absorptionskoeffizienten $k_{1||}$ und $k_{1\perp}$ für $\lambda_1 = 430$ m μ bzw. $k_{2||}$ und $k_{2\perp}$ für $\lambda_2 = 540$ m μ bei verschiedenen Kombinationen der Parameter c , η und β ermitteln, wenn die Zahl N der im Kubikzentimeter enthaltenen Teilchen mit der großen Halbachse c bekannt ist.

Die Beobachtungen an Sternschnuppen legen es nahe, für N eine Verteilungsfunktion vom Typus

$$N = N_0 c^{-n} \quad (16)$$

anzusetzen. Die kleinsten der beugenden Staubkörner haben Durchmesser von der Größenordnung 10^{-7} cm; die größten Teilchen, für welche die vorliegende Näherung noch gilt, sind von der Größenordnung 10^{-5} cm. Um den Beitrag aller dieser Partikel zum Absorptionskoeffizienten mit dem richtigen Gewicht zu erfassen, muß also (16) in (15) eingesetzt und dann über alle in Frage kommenden c -Werte integriert werden. Dazu führen wir die folgende Abkürzung ein:

$$\begin{aligned} A_{i1||} &= K_a'' + F_2(K_c'' - K_a''), \\ A_{i1\perp} &= \frac{1}{2}(K_c'' + K_a'') - \frac{1}{2}F_2(K_c'' - K_a''), \\ A_{i2||} &= G_0 + F_2G_2 + F_4G_4, \\ A_{i2\perp} &= H_0 + F_2H_2 + F_4H_4 \end{aligned} \quad (17)$$

für λ_i ($i = 1, 2$).

Damit erhält man dann nach der Integration von (15):

$$\bar{k}_{1||} = \frac{4\pi^2}{\lambda_1} N_0 10^{5n-20} \cdot \left[\frac{1-10^{2n-8}}{4-n} A_{11||} + \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} 10^{-5} \right) \frac{1-10^{2n-12}}{6-n} A_{12||} \right] \quad (18)$$

und entsprechend $\bar{k}_{1\perp}$, $\bar{k}_{2||}$, $\bar{k}_{2\perp}$.

Durchsetzt das Licht eine Staubwolke von s kpc Dicke, so ergibt sich für die Absorption in Größenklassen

$$\Delta m = 3,36 \cdot 10^{21} s \bar{k}. \quad (19)$$

5. Die Selektivität der Absorption

Da die Absorption des interstellaren Staubes in dem hier betrachteten Spektralbereich erfahrungsgemäß proportional zu λ^{-1} ist, haben wir im folgenden diejenigen Kombinationen der in (18) vorkommenden Parameterwerte η , β , n und N_0 aufzusuchen, für die unsere Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt. Dazu führen wir die mittleren Absorptionskoeffizienten ein:

$$\bar{k}_1 = (\bar{k}_{1||} + \bar{k}_{1\perp})/2, \quad \bar{k}_2 = (\bar{k}_{2||} + \bar{k}_{2\perp})/2 \quad (20)$$

und setzen dabei entsprechend

$$A_{11} = (A_{11||} + A_{11\perp})/2, \quad A_{12} = (A_{12||} + A_{12\perp})/2 \quad (20a)$$

usw.

Wenn nun die mittleren Absorptionskoeffizienten proportional zu λ^{-1} sein sollen, so muß nach (18) gelten:

$$\frac{A_{11} - A_{21}}{(2 \cdot 10^{-5})^2 \left(\frac{A_{12}}{\lambda_1^2} - \frac{A_{22}}{\lambda_2^2} \right)} = - \frac{4-n}{6-n} \frac{1-10^{2n-12}}{1-10^{2n-8}}. \quad (21)$$

Eine numerische Berechnung dieser Funktion für $n = +\infty$ und $n = -\infty$ zeigt, daß jedenfalls die Beziehung gilt

$$0,812 < \eta < 0,900.$$

Für das Achsenverhältnis der beugenden Ellipsoide folgt daraus:

$$7:16 < a:c < 7:12.$$

Das durchschnittliche Achsenverhältnis muß demnach nahe bei 1:2 liegen, wobei die Abweichungen höchstens $\pm 14\%$ des Mittelwerts betragen.

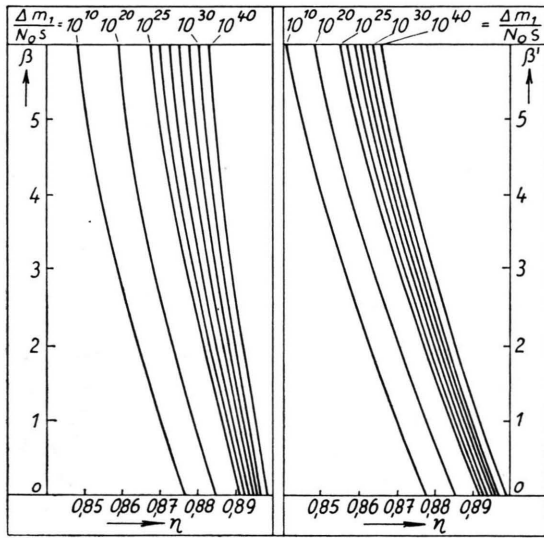


Abb. 2 a.

Abb. 2 a.

Abb. 2. Abhängigkeit des Ausrichtungsparameters β bei LANGEVIN-Verteilung (2 a) und β' bei GAUSS-Verteilung (2 b) von der numerischen Exzentrizität η der beugenden Teilchen für verschiedene Werte der Absorption pro kpc, bezogen auf eine Verteilung der Teilchengrößen, bei der auf den cm^3 1 Partikel mit der großen Achse $c=1$ kommt, unter der Voraussetzung, daß der mittlere Absorptionskoeffizient proportional zu λ^{-1} ist ($\lambda = \lambda_1 = 430 \text{ m}\mu$).

Nach Gl. (19) ist die Absorption in Größenklassen, bezogen auf 1 kpc Wolkendicke und eine Dichte, bei der auf den Kubikzentimeter 1 Teilchen von 1 cm Achsenlänge kommt, nur noch von den drei Parametern n , η , β bzw. β' abhängig. Mit Hilfe von (21) läßt sich einer von diesen, z. B. n , eliminie-

ren. Dadurch erhält man $\Delta m_i / N_0 s$ ($i = 1, 2$) in Abhängigkeit von η und β bzw. β' allein. In den Diagrammen Abb. 2 a und 2 b ist dies für $i=1$ durchgeführt. Diese Diagramme geben die Möglichkeit, bei bekannter Ausrichtung und Exzentrizität der beugenden Teilchen aus der beobachteten Absorption in Größenklassen den Wert des Produkts $N_0 s$ zu bestimmen.

6. Der Polarisationsgrad des durch Staubwolken geschwächten Lichts

Für den Polarisationsgrad erhält man in 1. Näherung

$$p_i = 0,46 \cdot (\Delta m_{i||} - \Delta m_{i\perp}) \quad (i = 1, 2). \quad (22)$$

Der Polarisationsgrad ist demnach eine Funktion derselben fünf Parameter wie die Absorption in Größenklassen selbst. In dem Verhältnis $p_i / \Delta m_i$ dagegen kommen N_0 und s nicht mehr vor, und mit der Selektivitätsbedingung (21) läßt sich auch noch der Verteilungsexponent n eliminieren, so daß man mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \Delta A_{ik} &= A_{ik||} - A_{ik\perp}, \\ P &= \frac{A_{11} - A_{21}}{A_{12}/\lambda_1^2 - A_{22}/\lambda_2^2} \quad (i, k = 1, 2) \end{aligned} \quad (23)$$

für das Verhältnis des Polarisationsgrades zur Absorption erhält:

$$\frac{p_i}{\Delta m_i} = 0,46 \frac{\Delta A_{i1} - P \Delta A_{i2}/\lambda_i^2}{A_{i1} - P A_{i2}/\lambda_i^2} \quad (i = 1, 2). \quad (24)$$

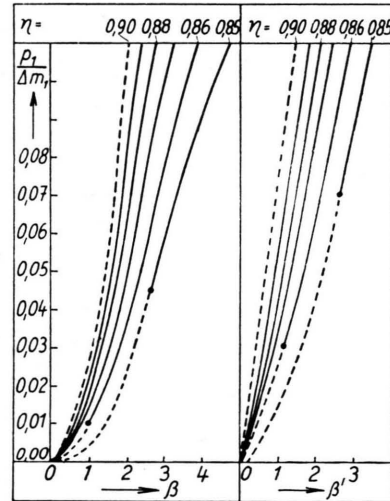


Abb. 3. Abhängigkeit des Verhältnisses Polarisationsgrad zu Absorption vom Richtungsparameter β bzw. β' für verschiedene Exzentrizitäten η der Staubteilchen bei $\lambda_1 = 430 \text{ m}\mu$, unter der Voraussetzung der Selektivität der Absorption mit λ^{-1} . Die nach (21) in Frage kommenden Kurvenstücke sind ausgezogen.

Schließlich untersuchen wir noch die Selektivität der Absorption. Zu diesem Zweck berechnen wir das Verhältnis der Polarisationsgrade bei den Wellenlängen $430 \text{ m}\mu$ und $540 \text{ m}\mu$, wobei wir gleichzeitig die Selektivitätsbedingung für die Absorption (21) einführen:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\Delta A_{11} - P \Delta A_{12}/\lambda_1^2}{\Delta A_{21} - P \Delta A_{22}/\lambda_2^2}. \quad (25)$$

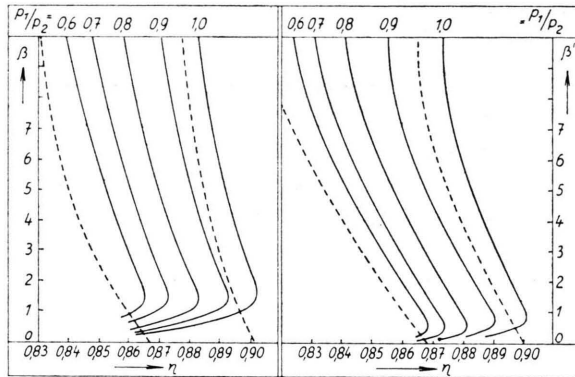


Abb. 4 a.

Abb. 4 b.

Abb. 4. Zusammenhang zwischen den Ausrichtungsparametern β bzw. β' und der Exzentrizität η der beugenden Teilchen für verschiedene Werte des Verhältnisses der Polarisationsgrade bei $430 \text{ m}\mu$ und $540 \text{ m}\mu$ unter der Voraussetzung einer Selektivität der Absorption mit λ^{-1} . Nach (21) kommt nur der zwischen den punktierten Linien liegende Wertebereich in Frage.

7. Die räumliche Dichte der absorbierenden Materie

Für die Dichte der Staubwolken, die aus Eisenteilchen rotationsellipsoidischer Gestalt mit großen Achsen zwischen 10^{-7} cm und 10^{-5} cm und einer mittleren Exzentrizität η bestehen, erhält man unter der Annahme des Verteilungsgesetzes (16):

$$\rho = \frac{4\pi}{3} 7,8(1-\eta^2) N_0 \frac{10^{5n-20} - 10^{7n-28}}{4-n}. \quad (26)$$

Andererseits ergibt sich für die mittlere Absorption in Größenklassen bei der Wellenlänge λ_1 aus (19) mit (18), (20) und (21):

$$\Delta m_1 = 3,08 \cdot 10^{27} s N_0 \frac{10^{5n-20} - 10^{7n-28}}{4-n} \cdot (A_{11} - P A_{12}/\lambda_1^2). \quad (27)$$

Aus (26) und (27) lassen sich wieder n und N_0 eliminieren:

$$\frac{\rho s}{\Delta m_1} = 1,06 \cdot 10^{-26} \frac{1-\eta^2}{A_{11} - P A_{12}/\lambda_1^2}. \quad (28)$$

Dem Diagramm Abb. 5 zufolge sind bei den vorliegenden Voraussetzungen nur Dichten möglich, für welche die Ungleichung gilt:

$$0,9 \cdot 10^{-26} < \frac{\rho s}{\Delta m_1} < 1,4 \cdot 10^{-26}. \quad (29)$$

Um die in weiten Gebieten der Milchstraße beobachtete Absorption von 1^m pro kpc erklären zu können, wären also Dichten notwendig zwischen $0,9 \cdot 10^{-26}$ und $1,4 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$.

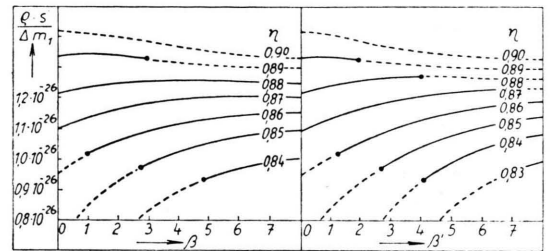


Abb. 5. Das Verhältniss der räumlichen Dichte der absorbierenden Materie zur Absorption pro kpc bei der Wellenlänge $430 \text{ m}\mu$ in Abhängigkeit vom Ausrichtungsparameter β bzw. β' für verschiedene Exzentrizitäten η der beugenden Teilchen, wenn die Absorption proportional zu λ^{-1} angenommen wird.

8. Berücksichtigung größerer Teilchen

Die Vermutung, daß im interstellaren Staub nicht nur Eisenteilchen mit Durchmessern $< 10^{-5} \text{ cm}$ vorkommen, liegt nahe. Im folgenden soll deswegen wenigstens grob abgeschätzt werden, wie sich die Ergebnisse der vorigen Kapitel ändern, wenn man die Wirkung größerer Partikel mit berücksichtigt. Da diese Teilchen im wesentlichen durch Abdeckung, also nicht mehr selektiv absorbieren, vernachlässigen wir bei den weiteren Überlegungen die Abhängigkeit der Absorption von der Wellenlänge des einfallenden Lichts und damit auch die polarisierende Wirkung der Lichtbeugung. Für Eisenkugeln haben SCHOENBERG und JUNG³ nach Daten von SCHALÉN⁴ die Absorptionsträge in Abhängigkeit vom Teilchendurchmesser graphisch dargestellt. Nehmen wir für Teilchen größer als 10^{-5} cm die aus dieser Kurve ermittelten Wirkungsquerschnitte, rechnen sie auf Rotationsellipsoide um und extrapolieren bis zu Teilchen mit der großen Achse $c = 1 \text{ mm}$, so erhält

³ E. SCHOENBERG, Mitt. Universit.-Sternwarte Breslau 4, 65 [1937].

⁴ C. SCHALÉN, Medd. Uppsala 1934, Nr. 58. — Uppsala Astron. Nachr. 253, 261 [1934].

Lfd.-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
β	0,8	1,0	0,8	0,8	1,2	0,5	0,4	0,7	0,5	0,6	0,5	1,6	0,8
β'	0,3	0,4	0,3	0,3	0,5	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,9	0,3

Tab. 5. Mittlere Ausrichtungsparameter für $3,5 \leq n \leq 4,0$ aus Abb. 8.

$\eta = 0,89$, was einem Achsenverhältnis von $a/c = 0,46$ entspricht.

Im gleichen n -Intervall erhält man für den Richtungsparameter bei den einzelnen Sternen die in Tab. 5 angegebenen Mittelwerte.

Daraus ergibt sich für die betrachteten Sterne:

$$\begin{aligned} 0,4 \leq \beta \leq 1,6 \\ 0,1 \leq \beta' \leq 0,9 \end{aligned} \quad \text{für } 3,5 \leq n \leq 4,0. \quad (35)$$

Vergleicht man außerdem (34) und (35) mit Abb. 4 a, b, so sieht man, daß das Verhältnis der Polarisationsgrade für das betrachtete n -Intervall in dem Bereich liegt

$$0,85 < p_1/p_2 < 1,15 \quad \text{für } 3,5 \leq n \leq 4,0. \quad (36)$$

HILTNER⁷ hatte bei zwei Sternen im Cepheus, CQ Cep und HD 211 853, für die Polarisationsgrade bei den Wellenlängen 420 m μ und 530 m μ keinen merklichen Unterschied gefunden, d. h. es wird dort $p_1/p_2 \approx 1$, was mit dem Mittelwert von (36) übereinstimmen würde.

Schließlich vergleichen wir unsere Ergebnisse noch mit der Abb. 5, die ein Maß für die räumliche Dichte der absorbierenden Materie vor den beobachteten Sternen gibt. Dabei erhält man bei beiden Richtungsverteilungen für alle Sterne nahezu

$$\varrho s / \Delta m_1 = 1,34 \cdot 10^{-26} \quad \text{für } 3,5 \leq n \leq 4,0. \quad (37)$$

Nun liegen die Extremwerte der Absorption nach Tab. 3 bei $\Delta m_{pv} = 3,2$ für Nr. 11 und $\Delta m_{pv} = 0,4$ für Nr. 12, was photographischen Absorptionswerten von $\Delta m_1 = 4,0$ für Nr. 11 und $\Delta m_1 = 0,5$ für Nr. 12 entspricht. Demnach bekämen wir als Extremwerte von ϱs :

$$\begin{aligned} \varrho s &= 5,4 \cdot 10^{-26} \text{ (g/cm}^3\text{) kpc für Nr. 11,} \\ \varrho s &= 0,67 \cdot 10^{-26} \text{ (g/cm}^3\text{) kpc für Nr. 12} \end{aligned} \quad (38)$$

und $3,5 \leq n \leq 4,0$.

Nimmt man eine Wolkendicke von rund 0,1 kpc an, so ergeben sich für die Dichten der Wolken Werte zwischen $5,4 \cdot 10^{-25} \text{ g/cm}^3$ für Nr. 11 und $0,67 \cdot 10^{-25} \text{ g/cm}^3$ für Nr. 12.

Aus den Abb. 2 a bzw. 2 b lassen sich bei bekannter Absorption noch die Größenordnungen des Produkts $N_0 s$ entnehmen. Führt man dies für die bei-

den extremen Sterne aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} 10^{-29} < N_0 s < 10^{-25} & \text{ für Nr. 11} \\ 10^{-30} < N_0 s < 10^{-26} & \text{ für Nr. 12} \end{aligned} \quad \text{und } 3,5 \leq n \leq 4,0. \quad (39)$$

Zum Vergleich soll der Wert von N_0 in Sonnenumgebung berechnet werden. Nach WATSON⁶ beträgt die räumliche Dichte der Meteoriten mit Massen zwischen $0,5$ und $2 \cdot 10^{-5} \text{ g}$ im Mittel $6,9 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$. Aus der allgemeinen kosmischen Häufigkeit der Elemente und der Zusammensetzung der Meteoriten kann man annehmen, daß dielektrische Partikel mindestens zehnmal häufiger sind als Metalle. Andererseits ist unter den Metallen das Eisen weitaus am meisten in den Meteoriten beobachtet worden. Nimmt man für die Dichte der dielektrischen Teilchen den Mittelwert 3 g/cm^3 , so ergibt sich mit der Dichte $7,8 \text{ g/cm}^3$ des Eisens bei diesem Mischungsverhältnis eine räumliche Dichte der Eisenmeteoriten von $1,42 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$. Unter der Annahme, daß es sich um kugelförmige Teilchen handelt, liegen ihre Radien etwa zwischen $0,5$ und $0,01 \text{ cm}$. Berechnet man mit der Verteilungsfunktion (16) die räumliche Dichte dieser Eisenmeteoriten, so ergibt sich:

$$\varrho_{\odot} = \frac{4\pi}{3} 7,8 N_0 \frac{0,5^{4-n} - 0,01^{4-n}}{4-n} \text{ g/cm}^3.$$

Mit dem oben berechneten Wert von $1,42 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$ erhält man daraus für N_0 den Ausdruck:

$$N_0 = 4,35 \cdot 10^{-28} \frac{4-n}{0,5^{4-n} - 0,01^{4-n}} \text{ cm}^{-3}. \quad (40)$$

Mit $n = 3,5$ bzw. $4,0$ liefert diese Gleichung für N_0 die Werte $3,6 \cdot 10^{-28}$ bzw. $1,1 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^{-3}$, die somit in der Größenordnung der nach (39) ermittelten Ergebnisse liegen.

Es wurde weiter untersucht, in welcher Richtung sich die bisher gewonnenen Resultate ändern, wenn man auch größere Teilchen berücksichtigt. An die Stelle der Abb. 8 a, b tritt nun die Abb. 9 a, b, aus der man nach einem Vergleich mit Abb. 6 erkennt, daß unter der Annahme eines für alle betrachteten Sterne gleichen Verteilungsexponenten n dieser mindestens gleich $3,6$ sein muß. Damit würde man jedoch bei dem Stern Nr. 12 undenkbar große Werte für den Ausrichtungsparameter β erhalten. Außerdem würden $N_0 s$ und ϱs zu groß werden. Um

plausible Werte für diese Größen zu erhalten, muß man schon $n = 3,9$ wählen. Dies würde einem Wert der mittleren Exzentrizität von $\eta = 0,75$ entsprechen,

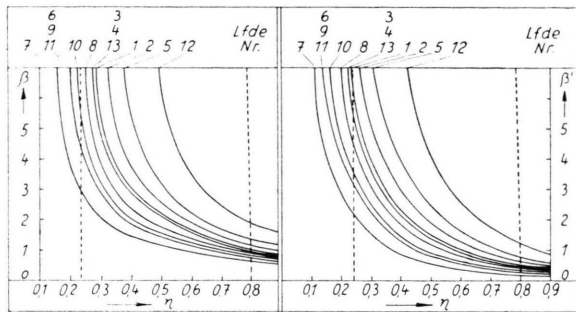


Abb. 9 a.

Abb. 9 b.

Abb. 9. Parameterpaare (η, β) bzw. (η, β') , die für die Sterne der Tab. 3 bei einer Selektivität der Absorption mit λ^{-1} unter Berücksichtigung von Teilchen mit Radien bis zu 1 mm die Werte der Tab. 4 liefern. Die punktierten Linien sind die Kurven für $n = 3,5$ und $n = 4,0$ gemäß Abb. 6.

d. h. einem Achsenverhältnis der beugenden Teilchen von $a : c = 2 : 3$. Außerdem wäre in diesem Fall für die betrachteten Sterne:

$$\begin{aligned} 0,6 < \beta < 2,1 \\ 0,2 < \beta' < 1,5 \end{aligned} \quad \text{für } n = 3,9 \text{ bzw. } \eta = 0,75. \quad (41)$$

Auch der in (30) angegebene Schwankungsbereich von p_1/p_2 zeigt, daß ein in der Nähe von 3,9 liegender Wert von n der HILTNERSchen Annahme wellenlängenunabhängiger Polarisation am besten gerecht würde, denn p_1/p_2 nimmt mit wachsendem n ab.

Für die kontinuierlich absorbierende Materie außerhalb der Dunkelwolken, die im Mittel 1^m pro kpc absorbiert, würde man erhalten:

$$\begin{aligned} \rho &= 5 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3 \\ N_0 &= 5 \cdot 10^{-28} \text{ g/cm}^3 \end{aligned} \quad \text{für } n = 3,9; \quad \eta = 0,75.$$

Der Wert von N_0 entspricht somit größenordnungsmäßig dem nach (40) aus der Sternschnuppenstatistik errechneten von $1,4 \cdot 10^{-28} \text{ cm}^{-3}$. Dasselbe gilt für die Dichte, wo sich in Sonnenumgebung der Wert $1,4 \cdot 10^{-26} \text{ g/cm}^3$ ergeben hatte, sofern man nur Eisenteilchen berücksichtigt.

III. Bemerkungen zur Richtenergie verschiedener Mechanismen, die für die anisotrope Verteilung der Teilchenachsen im Raum verantwortlich gemacht werden können

Der interstellare Raum ist erfüllt mit vier verschiedenen Arten von Feldern, die alle auf die Staubeilchen mehr oder weniger starke Kräfte ausüben:

1. Gravitationsfelder,
2. Elektromagnetische Strahlungsfelder,
3. Statische (oder quasistatische) elektrische Felder,
4. Statische (oder quasistatische) magnetische Felder.

Außerdem können Strömungen der interstellaren Materie, sei es innerhalb der Turbulenzzellen oder im Zusammenhang mit der Rotation der Milchstraße, zu anisotroper Verteilung der Längsachsen nicht-sphärischer Teilchen Anlaß geben.

Wir hatten in Gl. (8) ff. angenommen, daß diese Verteilung sich darstellen lasse durch das BOLTZMANNsche Theorem:

$$N = N_0 e^{-u/kT},$$

wo u die Energiedifferenz zwischen dem Zustand bedeutet, bei dem die Teilchenachse um den Winkel χ gegen die Vorzugsrichtung gedreht ist, und dem ausgerichteten Zustand. Diese Energiedifferenz wird bestimmt durch die Konstanten a und a' aus (9) und (9 a, b).

Würde nun zwischen interstellarem Gas und Staub Gleichverteilung der thermischen Energie bestehen, so wäre entsprechend den Temperaturen von 10 bis 100°K in den H I-Gebieten und 5000 bis $10\,000^\circ \text{K}$ in den H II-Gebieten größenordnungsmäßig nach Gl. (10)

$$a \text{ bzw. } a' \approx \begin{cases} 10^{-14} \text{ bis } 10^{-15} & \text{in H I-Gebieten} \\ 10^{-12} & \text{in H II-Gebieten,} \end{cases} \quad (42)$$

wenn man nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts β von der Größenordnung 1 annimmt.

Eine Abschätzung der dazu notwendigen Feldenergiedichten zeigt, daß diese bei allen obengenannten Mechanismen mit Ausnahme der magnetostatischen Felder unvorstellbar hoch liegen. (Da die von GOLD¹⁰ untersuchte Strömungsanisotropie nicht dem BOLTZMANNschen Theorem gehorcht, wurde sie hier nicht weiter diskutiert.)

Für die Ausrichtung im Magnetfeld ergibt sich unter der Annahme, daß es sich um Weicheisenteilchen handelt:

$$a' = \frac{2\pi}{3} (1 - \eta^2) \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) c^3 H_0^2$$

$$\text{mit } A = 2\pi \left(\frac{1}{\eta^2} - \frac{1 - \eta^2}{2\eta^3} \log \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right); \quad (43)$$

$$B = 4\pi \frac{1 - \eta^2}{\eta^3} \left(\frac{1}{2\eta} \log \frac{1 + \eta}{1 - \eta} - 1 \right).$$

¹⁰ T. GOLD, Not. Roy. Astron. Soc. **112**, 215 [1952]; Nature, Lond. **169**, 322 [1952].

Nun werden aber zumindest die kleineren der betrachteten Eiseiteilchen einheitliche WEISSsche Bezirke bilden, für die gilt:

$$a = \frac{4\pi}{3} (1 - \eta^2) c^3 J H_0. \quad (44)$$

Nimmt man für die Magnetisierung J eine Größenordnung von 10^3 cgs, so ergibt sich mit (42) aus (44) eine etwas kleinere Feldstärke H_0 des ausrichtenden Magnetfeldes als aus (43), sie liegt aber besonders in den H II-Gebieten noch sehr hoch.

Es sind jedoch verschiedene Faktoren wirksam, die eine Gleichverteilung der thermischen Energie zwischen interstellarem Staub und Gas verhindern. Einerseits verlieren die Teilchen Bewegungsenergie durch unelastische Zusammenstöße, andererseits erhalten sie durch den Strahlungsdruck benachbarter Sterne anisotrope Bewegungsenergie. Wendet man den JACOBISCHEN Virialsatz auf das Sternsystem an, so ergibt sich, daß der überwiegende Teil der Bewegungsenergie des Staubes in der galaktischen Rotation steckt, so daß für die ungeordnete Bewegung der Staubteilchen nur wenig übrig bleibt.

In elektrischen und magnetischen Feldern treten noch weitere Effekte auf, welche die thermische Rotation der Teilchen bremsen: Im elektrischen Felde ist es die JOULEsche Wärme, die bei der durch die Rotation bedingten Verschiebung der influenzierten Ladungen entsteht. Der dadurch entstehende Energieverlust ist jedoch nicht fähig, die thermische Rotationsenergie wesentlich herabzudrücken.

Im magnetischen Feld treten zwei Mechanismen auf, welche die Rotation der Eiseiteilchen mehr oder weniger stark abbremsen: Wirbelströme und Hystereseverluste.

Für das Verhältnis der Wirbelstromverluste zur Energiezufuhr durch Stöße thermischer Gasatome erhalten DAVIS und GREENSTEIN¹¹

$$\frac{\Delta E}{\Delta E'} = 1,3 \cdot 10^{19} c H_0^2 \sigma / n_H \sqrt{T}. \quad (45)$$

Eine Abschätzung zeigt, daß bei Teilchen von $c = 10^{-5}$ cm bereits eine magnetische Feldstärke von 10^{-5} GAUSS die Rotationsenergie durch Wirbelstromverluste wesentlich verkleinern würde. — Ferromagnetische Hysterese ist bei den optisch wirksamen Teilchen wegen ihrer geringen Größe nicht zu erwarten. Dagegen wird in solchen Teilchen, die ferro-

magnetische Einschlüsse in feiner Verteilung enthalten, durch einen der Hysterese entsprechenden Effekt Rotationsenergie der Teilchen in innere Energie verwandelt, wie es DAVIS und GREENSTEIN¹¹ annehmen.

Die Bremsung der Rotation durch irgendeinen der erwähnten Effekte führt jedoch im allgemeinen nicht zu einer Ausrichtung der Figurenachsen in Richtung der ausrichtenden Kraft, sondern infolge von Kreiseffekten in die dazu senkrechte Ebene, wie DAVIS und GREENSTEIN¹¹ zeigen konnten. Erst wenn $\Delta E / \Delta E' \gg 1$ ist, braucht man die Teilchen wegen ihrer im Zeitmittel geringen Rotationsenergie nicht mehr als Kreisel zu behandeln. Nur in diesem Fall stellt sich also die von uns diskutierte Verteilung nach dem BOLTZMANNschen Theorem ein. Da die Energieverluste durch Wirbelströme und bei paramagnetischer Relaxation von der Teilchengröße abhängen und da außerdem nach den Vorstellungen von SPITZER und TUKEY¹² die Zusammensetzung der Teilchen verschiedener Größe nicht gleich zu sein braucht, ist es durchaus möglich, daß bei kleinen Teilchen der DAVIS-GREENSTEINSche, bei großen dagegen der SPITZER-TUKEYsche, nach dem BOLTZMANNschen Theorem wirkende Ausrichtungsmechanismus überwiegend wirksam ist.

Wenn $\Delta E / \Delta E' \gg 1$ ist, kann man näherungsweise das Verhältnis der tatsächlichen mittleren thermischen Energie der Teilchen zur Gleichverteilungsenergie gleich $\Delta E' / \Delta E$ setzen. Aus (44) und (45) ergibt sich mit (42) für die Größenordnung der notwendigen magnetischen Feldstärken:

$$H_0 = \begin{cases} 6 \cdot 10^{-12} c^{-4/3} & \text{in H I-Gebieten,} \\ 6 \cdot 10^{-11} c^{-4/3} & \text{in H II-Gebieten.} \end{cases} \quad (46)$$

Für Teilchen mit der großen Halbachse $c = 10^{-5}$ cm erhält man also:

$$H_0 = \begin{cases} 3 \cdot 10^{-5} \text{ GAUSS} & \text{in H I-Gebieten,} \\ 3 \cdot 10^{-4} \text{ GAUSS} & \text{in H II-Gebieten.} \end{cases} \quad (47)$$

Ein Vergleich mit (45) ergibt für diesen Fall tatsächlich $\Delta E / \Delta E' \gg 1$, womit nachträglich die Berechtigung von (46) erwiesen ist. Die Werte von (47) sind wesentlich kleiner als die nach der ursprünglichen Theorie von SPITZER und TUKEY¹² berechneten Feldstärken und nur wenig größer als die Ergebnisse von DAVIS und GREENSTEIN¹¹.

¹¹ L. DAVIS jr. u. J. L. GREENSTEIN, *Astrophys. J.* **114**, 206 [1951].

¹² L. SPITZER jr. u. J. W. TUKEY, *Astrophys. J.* **114**, 187 [1951].